LA MATEMATICA
E LA DIDATTICA LABORATORIALE

L'apprendimento matematico comprende cinque fondamentali elementi che sono in connessione tra loro

1. Apprendimento di concetti:

noetica, in matematica è preliminare a qualsiasi attività;

2. Apprendimento di algoritmi:

richiede capacità meccaniche e mnemoniche (qui si inserisce anche l'apprendimento a memoria delle numerazioni, delle tabelline, saper dire una sequenza numerica al rovescio);

L'apprendimento matematico comprende cinque fondamentali elementi che sono in connessione tra loro

3. Apprendimento di strategie:

comprende la capacità di argomentare, di risolvere problemi, di dimostrare;

4. Apprendimento comunicativo:

riguarda la capacità di descrivere un oggetto, la capacità di definire;

L'APPRENDIMENTO MATEMATICO COMPRENDE CINQUE FONDAMENTALI ELEMENTI CHE SONO IN CONNESSIONE TRA LORO

5. Apprendimento semiotico:

considerando che i concetti matematici non esistono nella realtà (non possiamo vedere nella realtà il numero 3) l'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico per rappresentare quel concetto. Quello che si impara a maneggiare in matematica non sono i concetti, ma le loro rappresentazioni semiotiche, pertanto la semiotica è di fondamentale importanza. In matematica l'acquisizione concettuale passa attraverso l'acquisizione di uno o più registri e all'interno di questi di una o più rappresentazioni semiotiche.

! Lessico_sintassi_punto di debolezza per i DSA

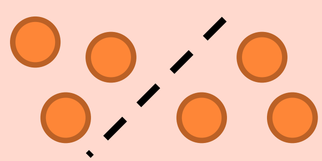
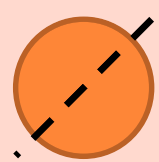
In matematica …

- … l’acquisizione concettuale passa attraverso l’acquisizione di uno o più registri e all’interno di questi di una o più rappresentazioni semiotiche.

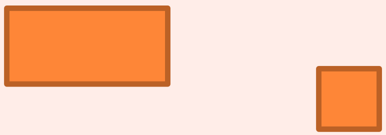
Esistono diversi registri semiotici

Proviamo ora, per esempio, a presentare diversi registri semiotici per il concetto di metà e, all'interno di questi, diverse rappresentazioni.

DSA REGISTRI E RAPPRESENTAZIONI SEMIOTICHE

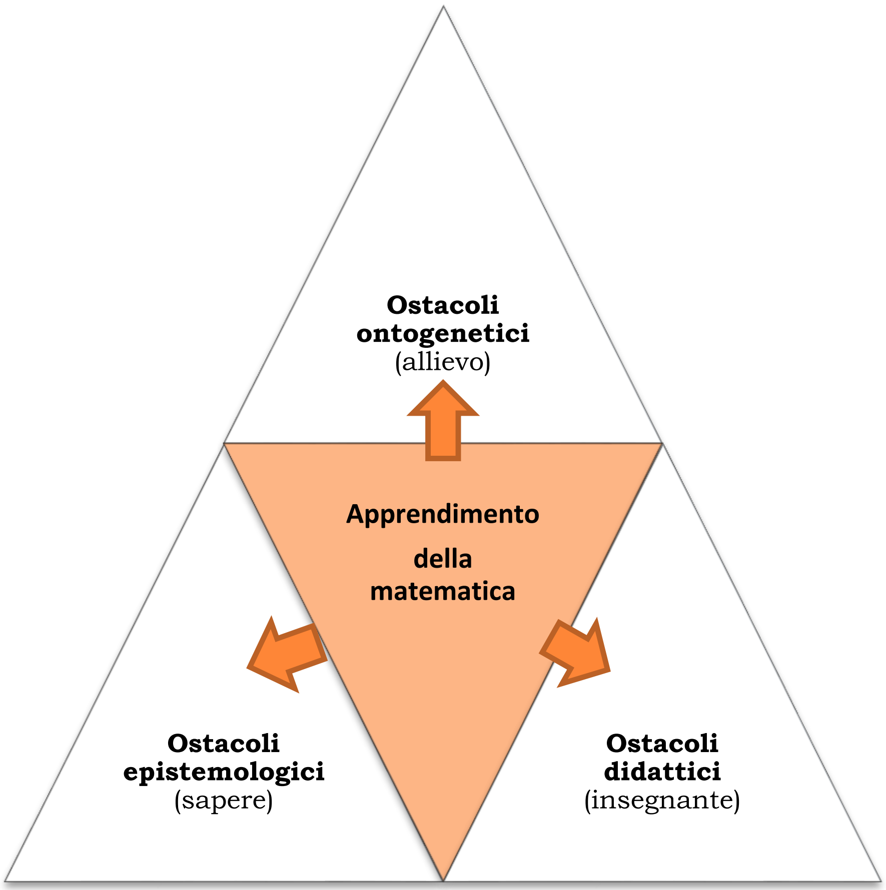
registro	rappresentazioni semiotiche in …	In …	In …	
Lingua comune	italiano	inglese	tedesco	…
	•metà • un mezzo •dividere per due, •frazionare per due •Uno su due	…		
	di quantità discrete reali	di quantità continue reali		
Operazione concreta	Divido in 2 parti uguali una scatola di colori	Taglio meccanicamente una torta in due parti uguali		
Schemi pittografici				

DSA Registri e rappresentazioni semiotiche

registro	rappresentazioni semiotiche in …			
Linguaggio aritmetico	1: 2= 2x2x2= 2·2·2= 2^3	$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$	½	Grafici
Linguaggio geometrico				Grafico
Linguaggio algebrico	a : 2= 2·a 2a a^3	a/2 $\frac{a}{3}$		

MA A SCUOLA NON SI IMPARA LA MATEMATICA … MA LA MATEMATICA MEDIATA DAL TRIANGOLO DELLA DIDATTICA!

Ostacolo matematico = è tutto ciò che, nel triangolo della didattica, si frappone all’apprendimento della matematica



GLI OSTACOLI MATEMATICI

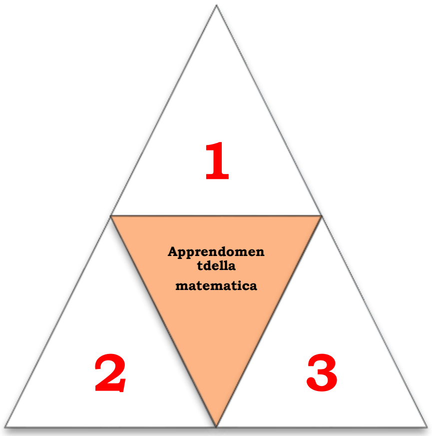
1 Ostacoli ontogenetici → allievo

- stadio di sviluppo: età mentale VS età cronologica
- distrazione, difficoltà, DSA

2 Ostacoli **epistemologici → sapere**

- complessità della disciplina

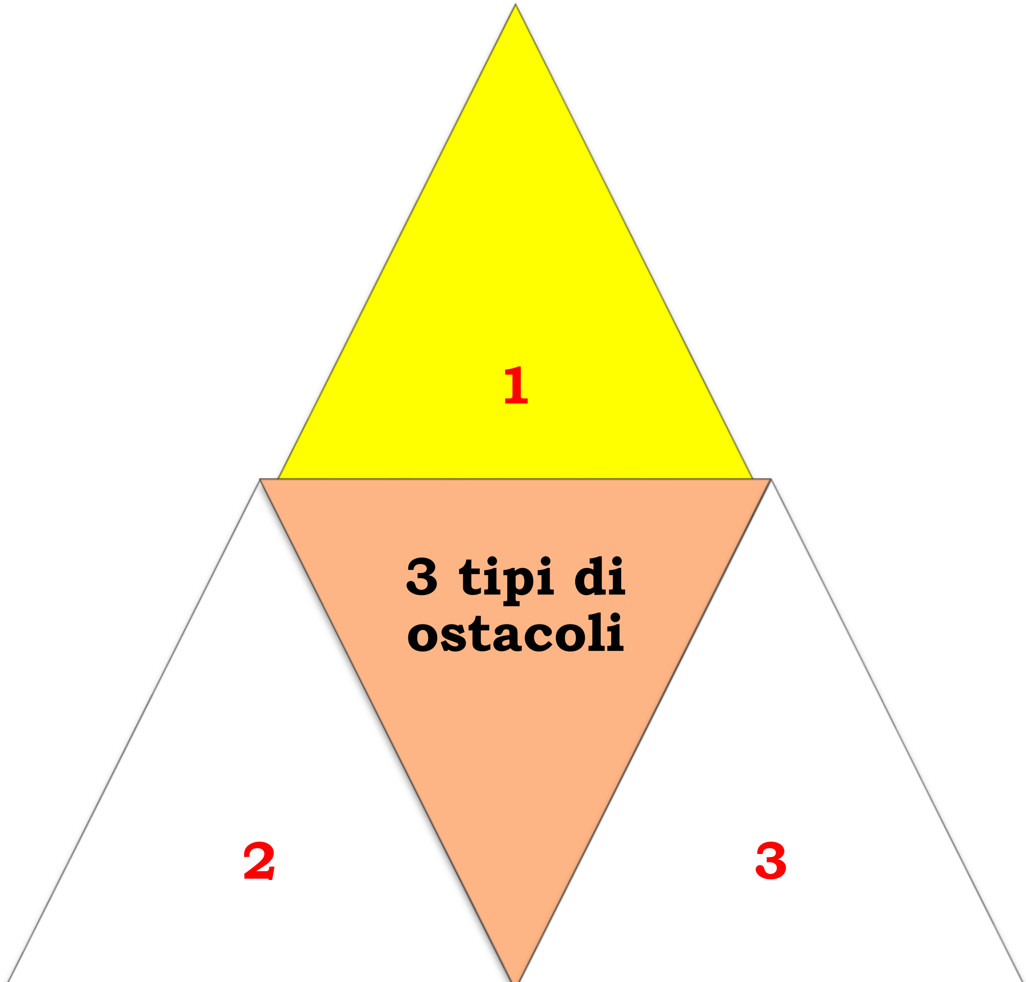
  “In tutto il mondo si commettono gli stessi errori”
- studi sulla storia della matematica
- studio degli allievi in aula



3 Ostacoli **didattici → insegnante**

- insegnante come barriera o facilitatore/catalizzatore?
- contratto didattico e metodologia didattica adottata
- stile educativo

Ostacoli ontogenetici → allievo



1 Ostacoli ontogenetici → allievo

Lettura di numeri

36+24=

3	6	+
2	4	=
6	1	

61… ah ho letto 7

Ma 6 più 4 cosa fa?

- Errore di calcolo
- 84+25=

	8	4	+
	2	5	=
1	1	0	

Pur usando le dita fa un errore di calcolo

Ostacoli ontogenetici → allievo

- 1256+324=

1	2	5	6	+
	3	2	4	=
1	5	7	5	

È sbagliato prova a rifare …

Mostra sei dita, dopo ne aggiunge 4 … e dice ah forse ho guardato solo una mano …

- Errori di algoritmo

3284-125=

3	2	8	4	-
	1	2	5	=

Legge più … poi, richiamato, dice di non ricordare come si fa

Ostacoli ontogenetici → ALLIEVO

- Errori di algoritmo

	2	5	x
	1	3	=
	7	5	+
	3	6	=
1	1	1	

Errori di algoritmo …
Passa dal moltiplicare (con l'uso della tavola pitagorica) le cifre, al sommarle.

- Dettato di numeri (focus sulla lunghezza di un compito)
- 8000, 124, 451, 101, 909, 124, 1204, 1215
- 8000, 124, 451, 101, 909, 124, 124, 10215

OSTACOLI ONTOGENETICI $\longrightarrow$ ALLIEVO

- INTERVISTA
- I: “Oggi sono stata molto esplicita, di fronte ai tuoi compagni ho detto che tu hai il diritto di usare la calcolatrice, ti ha dato fastidio?”
- A: “Sì, un poco”
- A : “ Mi dà fastidio perché penso che agli altri sembri impossibile”
- I : E tu pensi che sia impossibile?
- A : “No, perché lo so”

Strumenti compensativi
Usare la calcolatrice per ...

- allenare l'uso dei tasti:

attenzione e precisione nello schiacciare i tasti in modo esatto e nell'ordine esatto

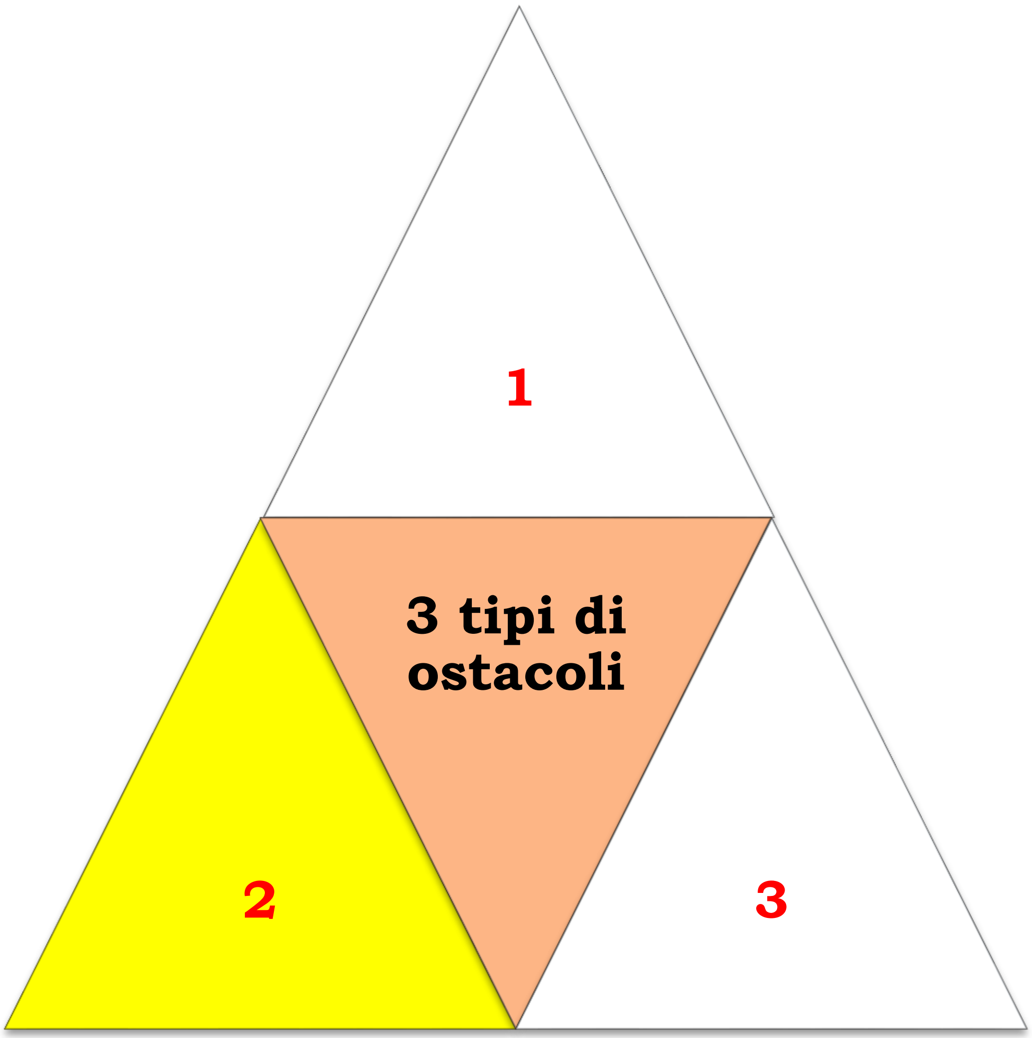
- fare scoperte:

  Moltiplicare per 10;

  Dividere per 10

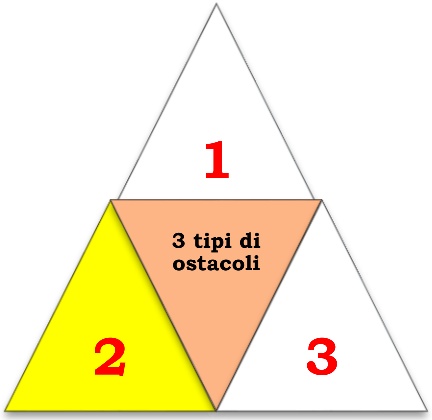
- Per fare esercizi
- Per risolvere problemi

OSTACOLI **EPISTEMOLOGICI → SAPERE**



2 Ostacoli epistemologici → sapere

Lo zero nella scuola dell'infanzia



E' già presente in forma ingenua in bambini:

- zero come cifra per scrivere i numeri grandi;
- zero come cardinale di una raccolta vuota.

Lo zero nella scuola primaria

Lo zero è presentato come oggetto mono-semantico. Invece andrebbe accolta l'ambiguità insita in questo oggetto matematico e cognitivamente sfruttata ed evidenziata.

Lo zero nella scuola secondaria di I e II grado

Esempio 1

- 35x10 "basta aggiungere uno zero": si rinuncia alla complessità della distinzione;
- ma 3,5x10 ? 0=3-3? 3+4=7 oppure?

Esempio 2

Risolvere l'equazione

$x^2-1 = 0$?

$(x-1)(x-3)= 0$?

E la disequazione

$x^2+1>0$?

Il comportamento razionale sarebbe quello di rendersi conto che la disequazione vale per ogni x in R (n° reale). Invece gli studenti sono soliti iniziare un'avventura formale inutile quanto complessa.

UN ESEMPIO DI OSTACOLO MATEMATICO: LO ZERO

Lo zero all'Università (Corso per futuri insegnanti)

Quale di queste frazioni ha valore minore?

0/1 2/3 0 0/7 1/100

- nessuno studente sceglie 2/3;
- pochissimi 0;
- le restanti frazioni sono tutte scelte.

Domanda 1: "Perché non hai scelto zero?"
"Ma quello non è una frazione; siccome lei ha detto "frazione" ho pensato che non volesse zero, ma una con il trattino".

Domanda 2: "Tra 0/1 0 0/7 che differenza c'è?"
"Beh, zero non è una frazione, delle altre non so; se uno le scrive ci sarà un motivo. Zero è nulla, non è un numero, (…) le altre sono frazioni".

UN ESEMPIO DI OSTACOLO MATEMATICO: LO ZERO

Come promuovere la costruzione di apprendimento

1^ riflessione

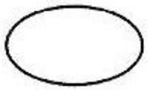
Un'**ancora per l'apprendimento** … soprattutto per gli alunni con difficoltà: lasciar esprimere in modo spontaneo, informale, ingenuo ogni concetto matematico che costituisce la base per ogni apprendimento significativo.

2^ riflessione

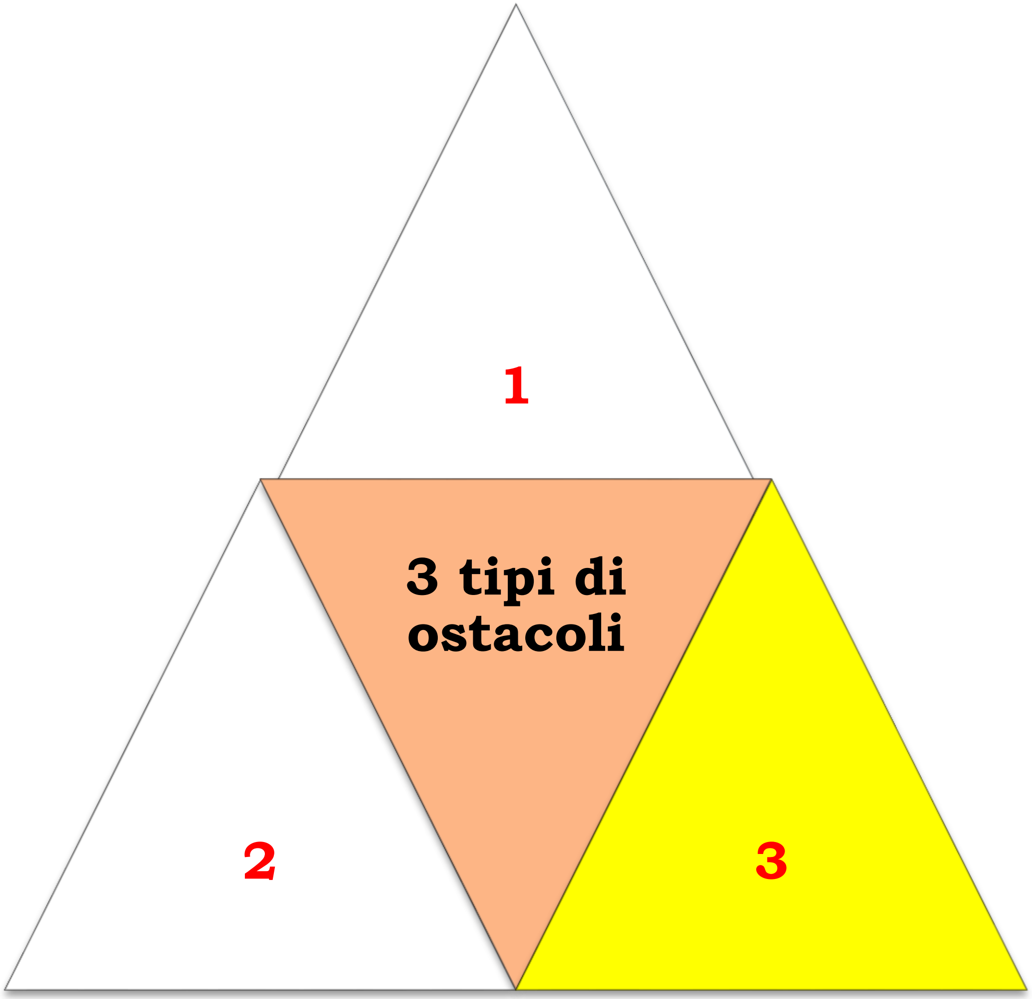
Si nascondono **molteplici situazioni** che **danno senso ad un concetto**. Per ciascuna situazione:

- È l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (referente) **(es: sull'uno all'infanzia**)
- È l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il significato); **(es: tabelline e la forma dei numeri)**
- È l'insieme delle forme linguistiche e i diversi registri semiotici che permettono al concetto di essere rappresentato simbolicamente

UN ESEMPIO DI OSTACOLO MATEMATICO: **LO ZERO**

zero	0	$\frac{0}{7}$	
l'unico naturale che non ha precedente	$\{x\in R \, / \, x^2=0\}$	card $\varnothing$	$\|\varnothing\|$
7-7	il più piccolo numero naturale		il separatore tra positivi e negativi in Z
$\|\{x\in R \, / \, x^2<-1\}\|$	0%	0:7	3×0

OSTACOLI **DIDATTICI** → **INSEGNANTE**



3 Ostacoli **didattici** → **insegnante**

- **L'immagine mentale** è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna)
- L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali stili personali è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi.
- Tuttavia l'immagine esterna è almeno in prima istanza involontaria.

CONCETTO DI MODELLO

- **L'insieme delle immagini mentali** relative ad un concetto costituisce il **modello mentale del concetto stesso.**
- **Ora può succedere che:**

1. **Il modello si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero di un modello corretto: quello che l'insegnante auspicava per quel concetto.**

2. **Il modello si forma troppo presto quando ancora rappresenta solo un'immagine che dovrebbe essere ampliata. In questo caso la stabilità del modello è di ostacolo ai futuri apprendimenti**
3. **(es: il prodotto accresce sempre e il quoziente diminuisce)**

Dal Conflitto alla misconcezione

- Lo studente si crea un’immagine, anche involontaria, che crede essere stabile, ma durante il suo processo di apprendimento si scontra con altre informazioni che contrastano con la prima immagine.

- Da qui nasce un conflitto cognitivo interno

- Alla base di questo conflitto vi sono delle **misconcezioni** temporaneamente non corrette perché in attesa di elaborazione cognitiva

MODELLI PARASSITI

Modelli parassita:

1. la moltiplicazione accresce sempre

Accetto il modello intuitivo della moltiplicazione e lo estendo a tutte le moltiplicazioni il modello intuitivo è rafforzato dalle raffigurazioni schematiche per schieramento

2. Nella divisione (a:b) “b”, deve essere sempre minore di “a”

<u>**Esempio del concetto di angolo con Pietro**</u>

(es: il prodotto accresce sempre e il quoziente diminuisce)

Misconcezione per la sottrazione”

Ancora sui modelli parassiti

- **Dal punto di vista didattico conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi**

- più forte è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per accomodarlo ad una nuova immagine

LA SOTTRAZIONE …

… presenta almeno due diversi significati intuitivi che si traducono in un unico significato formale, ma che si possono evidenziare ricorrendo a due problemi suggeriti da Efraim Fischbein:

- Problema: se togliamo 7 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?

In questo caso c’è coincidenza tra il significato intuitivo di “togliere via, quanto resta” e il significato formale (10-7)

LA SOTTRAZIONE ...

- Problema _ Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?

In questo secondo caso è assai più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo: 7 + … = 10

Sembra essere additiva ogni strategia in cui si debba trovare la quantità <u>“complementare a”</u>.

- Il ricorso al concetto di <u>“complementare a</u>” si osserva nei negozi quando i commessi devono dare il resto.

A CACCIA DI MISCONCEZIONI

Es: rombo o quadrato?

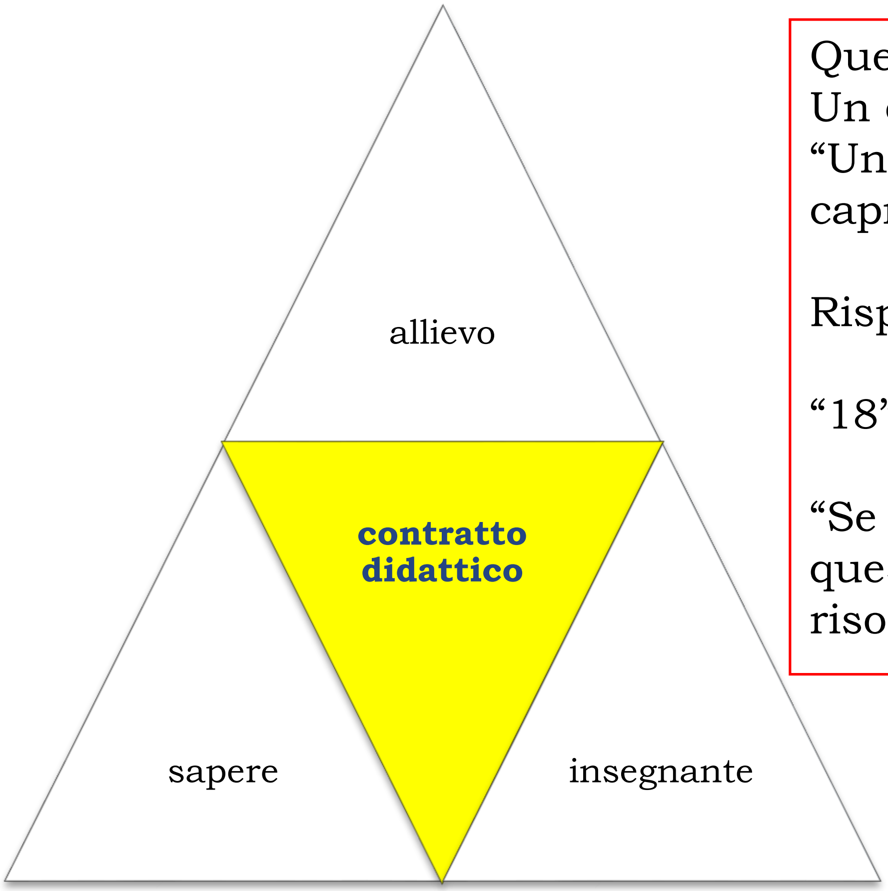
Es: l’altezza è sempre la verticale!

Es: misura perfetta!

Es: un poligono equiesteso è anche isoperimetrico

A voi … continuare la caccia alle misconcezioni!

MATEMATICA
MEDIATA → TRIANGOLO DELLA DIDATTICA



Quesito:
Un esempio di contratto didattico:
“Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?”

Risposte dell’allievo:

“18”

“Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere certamente risolto” → atteggiamento di compiacimento

Il **contratto didattico**

"**Lo studente** non opera in aula in base al processo di insegnamento-apprendimento, non si fa carico personale responsabile degli apprendimenti che sta costruendo, non "rischia" in situazioni problematiche nuove, non "osa" mettere in gioco il proprio sapere.

Soprattutto, egli **cerca di comportarsi, agire risolvere, rispondere sulla base di quel che ritiene che l'insegnante si aspetti da lui** (calchiamo la mano sullo studente, ma il discorso è reciproco)".

Dal testo "La didattica e le difficoltà in matematica", Bruno D'Amore, Martha Fandińo Pinilla, Ines Marazzani e Silvia Sbaragli, edizioni Erickson.

Esempi di frasi di alunni che richiamano al "**contratto didattico**" pattuito con il docente

- Quando c'è un problema sicuramente bisogna fare un'operazione
- L'insegnante non ci dà mai problemi impossibili
- Non ci possono essere dati impliciti
- I dati devono per forza essere numeri
- Esistono figure geometriche giuste e figure geometriche storte
- … a voi la caccia!

Perché spontaneamente si crea un contratto alunno-docente?

Perché si percepisce per differenza!

Cogliendo spontaneamente regolarità

Es: subitising per le interrogazioni!

Nella relazione studente/docente si creano delle aspettative

… Perché si percepisce per differenza

- Data la sequenza …
- 2 4 6 8 10 12 …
- Vi chiedo qual è il numero successivo ?

Il 14? Niente affatto e' il ...

- 2 4 6 8 10 12 …27

Ora genero la serie seguente:

2 4 6 8 10 12 27 2 4 6 8 10 12 27 2 4 6 8 10 12 27 …

Se ora vi chiedo di indovinare il numero successivo probabilmente direte “2”

Influirà su di voi il presupposto detto “rasoio di Occam o regola della parsimonia” cioè la preferenza per la più semplici tra le ipotesi che si conformano ai fatti.

Ma i fatti quali sono?

Perché si percepisce per differenza

Il fatto successivo non è in realtà mai accessibile: ciò che possedete è la speranza della semplicità, e il fatto successivo può sempre portarvi al livello di complessità successivo.

COME FARE?

Si può fare creando situazioni adidattiche dove gli studenti :

- possono sperimentare e cooperare e giocare

•Come fare?

PROPONENDO LA DIDATTICA DELLE DOMANDE LEGITTIME

- **Le domande legittime sono quelle che si pongono per sapere e non per controllare il sapere,** sono domande di cui non si conosce anticipatamente la risposta.

LA DIDATTICA DELLE DOMANDE LEGITTIME

Invita gli insegnanti ad un cambio di paradigma!

- l'insegnante abituato a lavorare su contenuti da lui strettamente controllati deve imparare a lavorare in una dimensione più creativa, meno prevedibile!
- Il cuore del processo didattico si situa nella caratteristica della "domanda" che necessita **di un lavoro di ricerca** peculiare.

LA METODOLOGIA DELLA RICERCA

Un progetto didattico deve potersi costruire sulla capacità di accogliere **il carico di complessità e di creatività che comporta il lavorare per problemi** affidandosi quindi alla metodologia della ricerca per creare il proprio percorso.

LA METODOLOGIA DELLA RICERCA

- Quello che conta nella ricerca è un metodo, un modo di pensare e di affrontare i problemi.

- **Ricercare significa indagare, dirigere consapevolmente il proprio pensiero.**

- **La ricerca è un'attività intenzionale e sistematica** di soluzione dei problemi, mediante l'uso di strumenti adatti e secondo un piano o un progetto.

- Il modello a cui si ispira la ricerca come **metodo** è quello **della ricerca scientifica**.

Momenti significativi di un percorso metodologico di ricerca

- **Motivazione alla ricerca:** fase fondamentale in quanto implica la capacità di porsi problemi, di interrogarsi sul perché e sul come dei diversi aspetti della realtà;
- **Estrinsecazione dell'immaginario**: è la fase della formulazione delle ipotesi e dei tentativi di spiegazione, uno dei momenti creativi della ricerca, di elaborazione di teorie in nuce; è una tappa obbligata se si vuol far emergere il vissuto degli alunni a partire dal loro patrimonio individuale;
- **Progettazione del lavoro:** si tratta di stimolare i ragazzi a mettere in relazione le problematiche emerse per organizzare gli argomenti e le varie direzioni della ricerca, definendo ciò che viene prima da ciò che viene dopo;

Momenti significativi di un percorso metodologico di ricerca

- **Preparazione e uso di materiali e/o di strumenti utili all'attività di indagine:** caratteristica importante in un approccio scientifico perché permette all'alunno di lavorare con le mani, di sperimentare oggetti e tecniche;

- **Documentazione- verifica:** è la fase di controllo delle ipotesi che avviene mediante l'esperienza e l'osservazione diretta, per passare successivamente ad usare fonti di informazione specifiche all'argomento trattato (dall'osservare al fare al documentarsi al fare nuovamente, in un processo a spirale).

Didattica laboratoriale

Per alcuni ragazzi, spesso i più difficili da un punto di vista scolastico, descrivere e difendere una cosa "fatta" sarà molto più facile, il fare diventa allora un ponte verso l'elaborazione e l'astrazione.

Didattica laboratoriale

Si verifica lo sforzo degli alunni di costruire "reti" di fatti diversi, lo sforzo di capire e di dare significato a quello che fanno…

… in cui più che risposte si impara insieme ai ragazzi a formulare domande acute.

Che cos'è un punto?

- lab "Il punto" 1° media

FARE IN MATEMATICA!

1. Lab: la nascita dei numeri
2. Lab: i numeri primi: costruire con i numeri primi
3. Lab: le potenze quadrate e cubiche: vedere le potenze
4. Lab: caccia al tesoro (idem della battaglia navale, ma con monete e banconote invece delle navi)
5. Lab: l'orto quadrato o rettangolare?

ideati da me

Creati dalla lettura di testi

ESERCIZI? O PROBLEMI?
ESERCIZI ... VS PROBLEMI
PER UN'ORA ALLA SETTIMANA ... PROBLEMI AL CENTRO!

- Quali problemi?
- **Veri:** che comportino uno **sforzo produttivo** non riproduttivo (vedi domande legittime)
- **Significativo:** che metta in gioco conoscenze e competenze matematiche (giochi della Bocconi)
- **Autentico**: contestualizzato (es: dato un filo di 20 cm)
- **Inclusivo:** permette a tutti gli allievi di dare un contributo (es: triangoli e quadrati magici; lettura di un grafico)

Risolvere problemi

- lab "Che cos'è una idea?"

Il gusto di:

1. capire un problema
2. so-stare sul problema
3. risolvere un problema

Il problema scatena emozioni sempre e comunque …

… o perché non siamo riusciti a risolverlo (rabbia, nervoso, delusione!

… o perché siamo riusciti a risolverlo e allora gli occhi brillano, l'autostima va alle stelle!

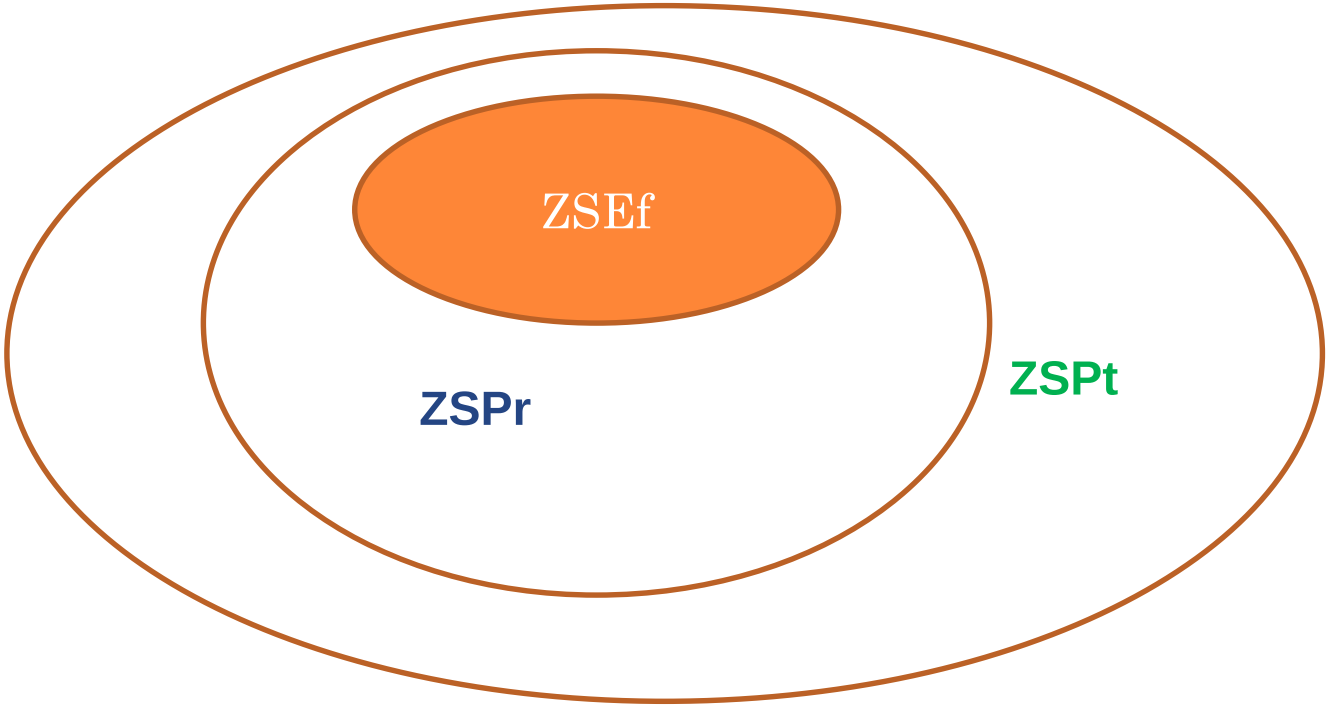
Giochi della Mathesis (obiettivo: far provare emozioni!)

Lo studente …

- “Il lavoro dello studente, basandosi sulle proprie conoscenze, nella **zona di sviluppo effettivo**, avanza nella strada della conoscenza, **nella zona di sviluppo prossimale** e dunque fatalmente commettendo degli errori attesi dal docente, correggendo i quali, discutendo i quali, si creeranno nuove immagini più potenti e comprensive del concetto in gioco, verso la creazione di un modello corretto, adeguato stabile.”

Zone di sviluppo (Vygotskij)

- Legenda:
- ZSEf: zona di sviluppo effettivo
- ZSPr: zona di sviluppo prossimale
- ZSPt zona di sviluppo potenziale



… COME UN RICERCATORE!

- "Il lavoro dello scienziato che, basandosi sulle proprie conoscenze, avanza sulla strada della scienza tentando di percorrere nuove vie e dunque, fatalmente, commettendo degli errori che si riveleranno poi più produttivi."

PER CONCLUDERE

"Formule da memorizzare, procedure da seguire, definizioni da ripetere parola per parola, simboli astrusi da manipolare: è questa la matematica?
No, è solo la triste caricatura cui l'ha ridotta la scuola. Perché la vera **matematica è una sublime forma d'arte**, è la creazione e l'esplorazione di un mondo immaginario abitato da creature fantastiche, **è poesia della ragione**".

Contro l'ora di matematica» di
Paul Lockhart

«La matematica e la sua didattica»

Grazie per l’attenzione

loreena.finato@gmail.com